Polynômes :

1. Définitions :

Un polynôme p est une fonction du type :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$$

Avec n un entier naturel.

Dans ce cas, a_n est le coefficient dominant du polynôme et n est le degré du polynôme et est noté deg(p).

2. Opérations :

Addition

Soit deux polynôme p et q.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \text{ et } q(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$$

On note le maximum de n et k : $max\ (n, k)$ et $\forall i > n, a_i = 0, \forall i > k, b_i = 0$

On a alors

$$(p + q)(x) = \sum_{i=0}^{\max(n,k)} (a_i + b_i)x^i$$

Produit

On reprend les mêmes polynômes p et q. On a alors

$$(pq)\ (x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_i b_j x^{i+j}$$

Il s'agit de la distributivité.

Factorisation

Le but est de transformer le polynôme

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$$

En produit de polynôme de degré 1

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

Dans $\mathbb{C}$ tous polynôme est factorisable sous cette forme ($\forall i \in [1, n]$ $x_i \in \mathbb{C}$ racine de p), ce n'est pas le cas dans $\mathbb{R}$.

Cependant dans $\mathbb{R}$ tous polynômes peut s'écrire sous la forme :

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^{u} (x - x_i) \prod_{j=1}^{v} (x^2 + 2\cos(\alpha_j)\, x + 1)$$

Avec $u + v = n$ et $\forall i \in [1, u]$ $x_i \in \mathbb{R}$ racine de p $\forall i \in [1, v]$ $\alpha_i \in \mathbb{R}$

Exemple :

$$p(x) = \ a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- 1ère étape : Calcul du discriminant :

$$\Delta = \ a_1^2 - 4a_2 a_0$$

- 2nde étape : Calcul des racines
- Si Δ= 0 alors on a

$$x_1 = x_2 = \frac{-a_1}{2a_2}$$

- Si Δ≥0 alors on a

$$x_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} \text{ et } x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2}$$

- Si Δ≤0 alors on a

$$x_1 = \frac{-a_1 - i\sqrt{-\Delta}}{2a_2} \text{ et } x_2 = \frac{-a_1 + i\sqrt{-\Delta}}{2a_2}$$

Division euclidienne

Soit A et B deux polynômes avec deg(A)> deg(B) alors il existe un unique couple (Q,R) de polynôme tel que : A = QB + R avec deg(R) < deg(B).

On dit que A est divisible par B si et seulement si il existe un polynôme Q tel que A = QB.

3. Intégration et dérivation :

Intégration

La primitive de $p(x)$ qui s'annule en 0 est

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$$

Dérivation

La dérivée de $p(x)$ s'écrit

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n} i\, a_i x^{i-1}$$

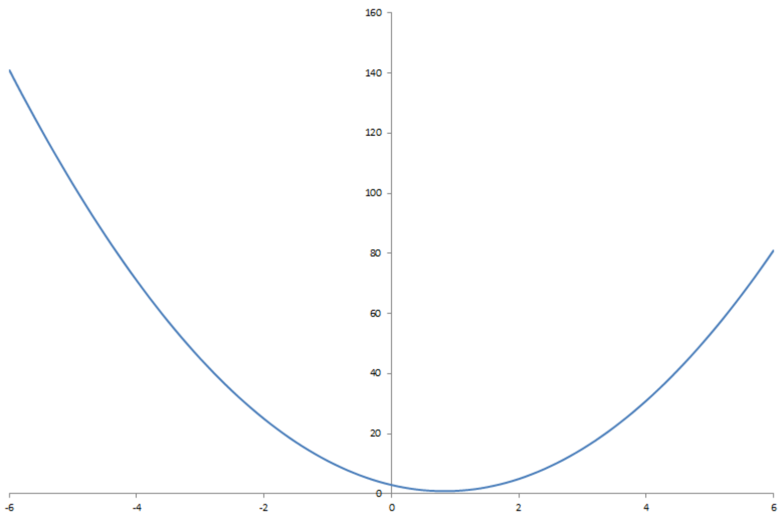
4. Limites

- Si deg(p) est pair alors le polynôme tend vers plus l'infini lorsque x tend vers plus ou moins l'infini
- Si deg(p) est impair alors le polynôme tend vers plus l'infini lorsque x tend vers plus l'infini et le polynôme tend vers moins l'infini lorsque x tend vers moins l'infini.

Deux courbes pour montrer ces limites :

- ✓ Deg(p) pair (ici deg(p)=2)

$$p(x) = 3x^2 - 5x + 3$$



- ✓ Deg (p) impair (ici deg(p)=3)

$$p(x) = 5x^3 + 3x^2 - 5x + 3$$